

Theorem:

Let  $U$  be the subgroup of  $S_{12}$  of order 216 generated by the elements

$(2\ 6\ 10)(3\ 7\ 11)(4\ 8\ 12); (1\ 5)(2\ 10)(4\ 8)(7\ 11); (2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8)(10\ 11\ 12); (1\ 7\ 2)(3\ 6\ 9)(5\ 11\ 10);$

and let  $B$  the subset of  $S_{12}$  consisting of the elements

$(1\ 12\ 11)(2\ 5\ 9\ 6\ 7\ 3\ 10\ 4\ 8); (1\ 6\ 9\ 10)(2\ 4)(3\ 5)(7\ 12\ 11\ 8); (1\ 7\ 2)(3\ 6\ 9)(4\ 8)(5\ 11\ 10); \text{id};$

Then  $C := \bigcup_{b \in B} b^U$  is a (12; 11)-PA of size 112.

Corollary:

$112 \leq M(12; 11) \leq 132:$

112 permutations are given below.

```
12 5 10 8 9 7 3 2 6 4 1 11
10 7 11 2 12 5 4 9 3 6 1 8
8 3 11 10 9 12 1 7 2 5 6 4
3 10 11 1 2 7 12 4 8 9 5 6
12 4 8 11 7 2 10 9 1 5 3 6
11 12 7 5 9 2 4 6 8 1 10 3
10 6 5 11 9 3 8 4 7 12 2 1
5 10 7 3 12 9 8 1 11 4 6 2
7 8 9 12 2 10 4 5 1 3 6 11
2 8 12 11 3 7 9 1 5 6 10 4
9 10 8 5 6 4 1 12 3 7 2 11
12 8 11 5 1 9 6 3 7 2 4 10
11 10 5 7 1 8 2 9 6 3 12 4
4 6 8 2 1 12 3 5 11 9 10 7
7 5 8 1 12 3 11 6 10 2 9 4
8 4 7 12 6 3 2 11 5 9 1 10
5 9 4 1 8 12 2 10 7 6 3 11
8 10 6 9 3 5 11 2 1 12 4 7
8 11 9 5 7 1 3 4 10 6 12 2
12 9 1 2 10 8 11 4 5 7 6 3
6 12 9 3 1 7 11 10 4 5 2 8
2 11 5 8 12 4 6 10 1 9 7 3
9 8 2 10 12 11 5 4 6 1 3 7
11 6 9 8 4 5 12 1 2 7 3 10
5 8 10 6 4 2 11 7 3 9 12 1
9 1 7 11 4 12 6 2 10 3 5 8
6 5 12 9 8 2 1 4 11 3 7 10
11 1 4 9 12 10 3 7 5 8 2 6
2 3 7 6 1 5 10 4 12 8 9 11
4 3 12 8 6 10 11 9 7 1 5 2
3 12 6 10 4 1 8 9 5 2 7 11
9 12 1 8 2 3 10 7 11 6 4 5
5 7 6 11 2 8 3 12 4 1 9 10
5 4 11 8 10 1 9 6 12 3 2 7
```

3 1 2 7 9 4 11 5 12 6 8 10  
5 3 1 9 7 4 12 11 6 2 10 8  
6 10 2 8 7 12 4 3 5 11 9 1  
7 6 11 3 8 4 10 2 5 1 12 9  
3 11 7 2 8 10 9 12 6 5 4 1  
8 1 5 6 10 7 4 12 11 2 3 9  
10 3 9 1 11 2 6 12 5 4 8 7  
10 12 2 6 8 9 3 11 1 7 5 4  
10 5 6 12 1 4 9 7 8 11 3 2  
5 6 2 12 11 7 1 9 10 8 4 3  
5 1 9 2 6 11 10 3 8 12 7 4  
3 7 4 8 1 2 5 11 10 12 6 9  
12 10 4 6 11 3 9 5 2 1 7 8  
7 9 5 10 6 2 3 1 12 11 4 8  
8 9 2 11 1 10 12 6 3 4 7 5  
4 1 11 12 3 2 8 10 6 7 9 5  
5 12 8 7 3 10 6 4 2 11 1 9  
4 11 10 7 2 9 1 6 5 12 3 8  
4 5 7 10 11 8 12 3 1 6 2 9  
4 8 1 3 9 5 2 12 10 11 7 6  
2 4 6 1 9 10 5 3 11 7 12 8  
9 11 6 3 10 2 12 5 7 8 1 4  
9 4 12 7 11 5 3 10 8 2 6 1  
6 7 1 5 11 10 8 2 12 9 3 4  
9 6 10 1 3 8 4 11 12 5 7 2  
3 6 12 5 10 11 2 7 1 4 9 8  
2 10 1 12 4 11 3 6 7 5 8 9  
9 5 11 6 7 10 2 1 4 12 8 3  
6 11 4 12 9 8 10 1 3 2 5 7  
6 9 11 7 4 3 5 12 1 8 10 2  
2 6 4 10 7 9 11 12 8 3 1 5  
11 3 8 12 10 9 5 2 4 6 7 1  
7 10 12 2 9 1 6 11 4 8 3 5  
12 6 7 9 2 1 5 10 3 11 8 4  
7 4 10 9 1 11 8 12 2 6 5 3  
9 7 5 12 8 1 11 3 2 4 10 6  
10 9 7 8 3 11 1 5 4 2 12 6  
11 7 10 3 6 12 9 4 1 2 8 5  
6 4 5 2 3 9 12 7 10 1 8 11  
3 5 1 11 6 9 4 10 2 8 12 7  
4 12 5 1 7 11 9 2 3 8 6 10  
11 9 12 6 2 4 8 3 10 5 1 7  
12 7 9 10 3 4 2 6 11 8 5 1  
3 4 9 6 12 8 1 2 7 11 10 5  
12 11 2 1 6 5 8 7 4 3 10 9  
7 12 4 11 10 5 1 3 6 9 8 2  
4 9 6 5 12 7 10 11 2 3 8 1  
8 7 12 1 4 9 10 5 6 11 2 3  
2 9 8 3 11 1 4 7 6 12 5 10  
2 5 9 7 10 12 8 11 3 1 4 6  
6 1 8 10 2 5 9 11 7 4 12 3  
8 5 4 3 2 11 6 9 12 7 10 1  
11 4 1 10 8 7 6 5 3 12 9 2  
4 7 2 9 10 3 6 1 8 5 12 11  
10 1 12 3 7 8 5 6 2 9 4 11  
2 1 10 5 8 3 12 9 4 11 6 7  
6 3 10 11 12 1 2 5 8 7 4 9

7 3 2 5 4 8 9 10 11 12 1 6  
3 8 5 9 11 12 10 6 4 7 1 2  
11 8 6 2 7 3 1 10 12 4 5 9  
10 8 4 7 6 1 12 2 11 5 9 3  
7 11 1 6 3 12 5 9 8 4 2 10  
10 11 8 9 4 7 2 3 12 1 6 5  
8 12 10 2 11 4 5 1 7 3 9 6  
12 3 6 7 8 11 4 1 10 9 2 5  
7 1 6 8 11 9 2 4 3 5 10 12  
12 2 5 3 4 10 1 11 8 6 9 7  
6 8 7 1 10 4 3 9 2 12 11 5  
5 11 12 10 1 3 4 2 9 7 8 6  
2 12 11 9 6 8 7 5 10 4 3 1  
11 5 2 4 3 1 10 12 7 9 6 8  
1 7 8 6 9 11 12 10 5 3 4 2  
10 4 3 5 2 12 11 1 6 8 7 9  
9 3 4 2 5 7 8 6 1 11 12 10  
3 9 10 12 7 5 6 8 11 1 2 4  
4 10 9 11 8 6 5 7 12 2 1 3  
8 6 1 7 12 2 9 3 4 10 5 11  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12